



TITLE:

# Bounded Approximation by Analytic Functions (Function Algebraとその応用)

AUTHOR(S):

小林, 佑子

---

CITATION:

小林, 佑子. Bounded Approximation by Analytic Functions (Function Algebraとその応用).  
数理解析研究所講究録 1974, 206: 144-158

ISSUE DATE:

1974-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105159>

RIGHT:

Bounded approximation  
by analytic functions

北大 応電研 小林 佑子

§ 1 序

最近, A. Davie [3] によって  $A(\mathbb{D})$  上での一様有界各点収束に於て, 収束列を極限関数のノルムより小さい物で取り直せる事. 及び  $R(K)$  に対しても類似の結果が成立することが示された。ここではこの事実に基づいた T. Gamelin と J. Garnett の結果 [7] を中心に紹介する。

まず, 1つの正測度  $\sigma$  に対し, 或性質  $P_0(1)$  を持つ測度と考える。これを一般の函数環  $A$  と関連付けて考える。即ち,  $f \in A^\perp$  が  $\sigma$  に対し  $P_0(1)$  を持つ時の 2, 3 の結果を述べる。次に § 3, § 4 では  $A(\mathbb{D})$ ,  $R(K)$  に対し § 2 で考えた関係の成立する測度の具体例を考える。特に  $A(\mathbb{D})^\perp$ ,  $R(K)^\perp$  に対し  $\sigma$  に相当する測度と考え, § 2 で得られた結果を各場合について考察する。

まず一般論から始める。

/

## §2. Distance estimates for uniform algebras.

この章では  $X$  は compact space とし,  $X$  上の複素(実)連続函数全体を  $C(X)$  ( $C_R(X)$ ) で表わす。  $A$  は  $X$  上の uniform algebra を示す。又, 正測度  $\sigma$  に対し,  $A$  の  $L^\infty(\sigma)$  での weak\* 閉包を  $H^\infty(\sigma)$  で表わす。任意の  $h \in C(X)$  に対し,

$$d(h, A) = \inf \{ \|h - f\|, f \in A \}$$

とする。又,  $d(h, H^\infty(\sigma))$  に対しても同様であるものとする。

まず始めに基本的な補題を示す。

**補題 2.1.**  $\tau$  は  $X$  上の測度とする。もし  $H^\infty(\sigma + |\tau|)$  から  $H^\infty(\sigma)$  への制限写像が isometry ならば, この写像は onto な写像である。

今, 次のような性質を持つ  $X$  上の測度  $\tau$  を考える。

$$P_\sigma(1): (i). \quad \text{supp}(\tau) \subseteq \text{supp}(\sigma).$$

$$(ii). \quad \tau\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |F(y)| \leq \sigma\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |F(y)|.$$

$$\text{但し } x \in \text{supp}(\tau), F \in H^\infty(\sigma + |\tau|)$$

この性質  $P_\sigma(1)$  は次に示す性質  $P_\sigma(2)$  によって書き換えられることが補題 2.2 によって示される。

$$P_\sigma(2): \quad u \in C_R(X), u \geq 0 \text{ 及び } F \in H^\infty(\sigma + |\tau|) \text{ に対し}$$

$$|F| \leq u \text{ a.e. } (d\sigma) \text{ ならば } |F| \leq u \text{ a.e. } (d\tau) \text{ である。}$$

補題 2.2.  $\tau$  を  $X$  上の測度とする。この時

$\tau$  が性質  $P_0(1)$  をもつ。  $\Leftrightarrow$   $\tau$  が性質  $P_0(2)$  をもつ。

証明)  $\Rightarrow$  は明らか故。  $\Leftarrow$  だけを示す。今  $P \in X\text{-supp}(\sigma)$  とする。  $u=1$  on  $\text{supp}(\sigma)$  かつ  $u(p) < 1$  なるような  $u \in C_R(X)$ ,  $u \geq 0$  をとれば,  $1 \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$  より  $F=1 \leq u$  a.e.  $(d\sigma)$  故,  $1 \leq u$  a.e.  $(d\tau)$ 。よって  $P \notin \text{supp}(\tau)$  で (i) が示される。次に (ii) が不成立とすればある  $F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$  及びある  $x \in \text{supp}(\tau)$  に対し  $\sigma\text{-ess} \lim_{y \rightarrow x} \sup |F(y)| > \tau\text{-ess} \lim_{y \rightarrow x} \sup |F(y)|$ 。よってある  $C > 0$  と  $x$  の近傍  $V$  が存在して,  $|F| < C$  a.e.  $(d\sigma)$  on  $V$  でありかつ  $\{y \in V, |F(y)| > C\}$  は正の  $|\tau|$ -測度をもつ。今  $u=C$  on  $V$  かつ  $|F| \leq u$  a.e.  $(d\sigma)$  なる  $u \in C_R(X)$ ,  $u \geq 0$  を考えれば  $\tau$  は  $P_0(2)$  を持たない。よって  $P_0(2)$  ならば  $P_0(1)$  である。

補題 2.3.  $X$  上の測度  $\tau$  が  $P_0(1)$  を満たすならば

(i)  $H^\infty(\sigma+|\tau|)$  から  $H^\infty(\sigma)$  への制限写像は isometry である。

(ii)  $f \in C(X)$ ,  $F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$  に対し

$$\|f - F\|_{L^\infty(\sigma+|\tau|)} = \|f - F\|_{L^\infty(\sigma)} \text{ である。}$$

証明) (i)  $\text{supp}(\tau) \subseteq \text{supp}(\sigma)$ 。  $\sigma\text{-ess} \lim_{y \rightarrow x} \sup |F(y)| = C_x$  とする。  $F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$  に対し, ある  $f \in H^\infty(\sigma)$  が存在して,  $F = f$  a.e.  $(d\sigma)$  である。又  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall x \in \text{supp}(\tau)$  に対し, ある  $x$  の近傍  $V_x$  が存在して,  $|F(y)| < C_x + \varepsilon$  a.e.  $(d\sigma)$  かつ a.e.  $(d\tau)$  on  $V_x$

故、 $|F(y)| < C_x + \varepsilon \leq \|F\|_{L^\infty(\sigma)} + \varepsilon$  a.e.  $d(\sigma + |\tau|)$  on  $V_x$ 。又  $x \in \text{supp}(\sigma) = \text{supp}(\tau)$  に対し  $x$  の近傍  $V_x \in V_x \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$  の  $|F| < C_x + \varepsilon$  a.e.  $(d\sigma)$  on  $V_x$  に取れば、結局、 $\forall x \in \text{supp}(\sigma + |\tau|)$  に対し、 $|F| < \|F\|_{L^\infty(\sigma)} + \varepsilon$  a.e.  $d(\sigma + |\tau|)$  on  $V_x$  となり、 $\|F\|_{L^\infty(\sigma + |\tau|)} = \|F\|_{L^\infty(\sigma)}$  と得る。  
 逆同値は明らかな故  $\|F\|_{L^\infty(\sigma + |\tau|)} = \|F\|_{L^\infty(\sigma)}$  である。

(ii) の証明。  $\forall x \in \text{supp}(\tau)$  に対し

$$\begin{aligned} \tau\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |h(y) - F(y)| &= \tau\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |h(x) - F(y)| \\ &\leq \sigma\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |h(x) - F(y)| \\ &= \sigma\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |h(y) - F(y)| \end{aligned}$$

より (i) と同様にして結果を得る。

定理 2.4.  $\forall \tau \in A^\perp$  が  $P_\tau(1)$  を持つならば、

$$d(h, A) = d(h, H^\infty(\sigma)), \quad \forall h \in C(X).$$

特に、 $A = H^\infty(\sigma) \cap C(X)$  である。

証明)  $h \in C(X)$  とする。又  $f \in H^\infty(\sigma)$  である。この時、ある  $\tau \in A^\perp$  が存在し、 $d(h, A) = |\int h d\tau|$ ,  $\|\tau\| \leq 1$  とできる。  
 これは  $P_\tau(1)$  を持つ故、補題 2.3 よりある  $F \in H^\infty(\sigma + |\tau|)$  が存在して  $F = f$  a.e.  $(d\sigma)$  とできる。 $\tau \perp H^\infty(\sigma + |\tau|)$  より  $|\int h d\tau| = |\int (h - F) d\tau| \leq \|h - F\|_{L^\infty(\tau)} \leq \|h - F\|_{L^\infty(\sigma + |\tau|)} = \|h - F\|_{L^\infty(\sigma)}$  である。よって  $d(h, A) \leq \|h - F\|_{L^\infty(\sigma)} = \|h - f\|_{L^\infty(\sigma)}$  である。

これはすべての  $f \in H^\infty(\Omega)$  に対し成立する。よって  $d(h, A) \leq d(h, H^\infty(\Omega))$ 。逆は明らか故、 $d(h, A) = d(h, H^\infty(\Omega))$  である。

### §3 Application to $A(\Omega)$ .

ここでは前の章で示した性質  $P_2(1)$  を持つ測度の具体例を  $A(\Omega)$  に対して考える。

$\Omega$  は複素平面内の有界開集合とし、 $\bar{\Omega}$  で  $\Omega$  の閉包を、 $\partial\Omega$  で  $\Omega$  の境界を示すものとする。 $C(\bar{\Omega})$  ( $C_{\mathbb{R}}(\bar{\Omega})$ ) で  $\bar{\Omega}$  上の複素(実)数値連続関数の全体を示し、 $A(\Omega) = \{f \in C(\bar{\Omega}) : f \text{ analytic in } \Omega\}$  とする。又  $H^\infty(\Omega)$  は  $\Omega$  上の有界解析関数全体を示す。 $\Omega$  に制限された面積測度を  $\lambda_\Omega$  で、 $\bar{\Omega}$  上の正測度  $\sigma$  に対し、 $H^\infty(\Omega)$  で  $A(\Omega)$  の  $L^\infty(\sigma)$  での  $\text{weak}^*$  閉包を表わす。 $A(\Omega)^\perp$  は  $A(\Omega)$  に対する orthogonal measure の全体である。

今  $f \in \mathbb{C}$  上の bounded Borel function とし、 $g$  を compact 支持を持つ smooth function とする。

$$\begin{aligned} (T_g f)(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy \\ &= g(\zeta) f(\zeta) + \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z)}{z - \zeta} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy, \quad \zeta \in \mathbb{C} \text{ とおく。} \end{aligned}$$

$T_g f$  の性質については [5], [6] に詳しく述べられている。

$$B = \left\{ f \in H^\infty(\Omega) : \begin{array}{l} \exists \{f_n\} \subset A(\Omega), \sup_n \|f_n\| < \infty \\ f_n \rightarrow f \text{ pointwise on } \bar{\Omega} \end{array} \right\}$$

とする。この時次の定理が成立する。この定理は重要である。

定理 2.1 (A. Davie).

$f \in B$  ならば、ある  $\{g_n\} \subset A(\mathbb{U})$  が存在して、 $\|g_n\| \leq \|f\|$  かつ  $g_n \rightarrow f$  pointwise on  $\mathbb{U}$  とできる。

上の定理より直ちに次の系を得る。

系 3.2.  $B$  は  $L^\infty(\lambda_{\mathbb{U}})$  に於る weak\* 閉包である。

よって、 $B = H^\infty(\lambda_{\mathbb{U}})$  である。

上の結果を基本として  $P \in A(\mathbb{U})^\perp$  に対し、 $\lambda_{\mathbb{U}}$  を  $\sigma$  として取れることと以下に示す。

補題 3.3 任意の  $P \in A(\mathbb{U})^\perp$  に対し、 $F \in H^\infty(\lambda_{\mathbb{U}} + |P|)$  が  $F = 0$  a.e.  $(d\lambda_{\mathbb{U}})$  ならば  $F \equiv 0$  である。

証明).  $P \perp H^\infty(\lambda_{\mathbb{U}} + |P|)$  故、 $FP \perp A(\mathbb{U})$ 。又、 $F = 0$  a.e.  $(d\lambda_{\mathbb{U}})$  より  $\frac{F}{z-\lambda} \in H^\infty(\lambda_{\mathbb{U}} + |P|)$  a.e.  $\lambda \in \mathbb{U}$ 。よって  $\int \frac{F}{z-\lambda} dP = 0$  a.e.  $(d\lambda_{\mathbb{U}}) \lambda \in \mathbb{U}$ 。よって [2] の補題 1.1 より  $\int g F dP = 0, \forall g \in C(\partial \mathbb{U})$  かつ  $\text{supp}(FP) \subseteq \overline{\mathbb{U}}$  より  $FP \equiv 0$ 。一方、 $P \neq 0$  より、 $F = 0$  a.e.  $(dP)$ 。よって  $F \equiv 0$  である。

補題 3.4 任意の  $P \in A(\mathbb{U})^\perp$  とする。今、

$H^\infty(\lambda_U + |p|)$  から  $H^\infty(\lambda_U)$  への制限写像は algebra isometric isomorphism である。

証明). isometric は定理 2.1 より得られる。後は明らかである。

補題 3.5.  $f \in H^\infty(\lambda_U)$  とする。今,  $f$  analytic at  $p_0 \in \mathbb{C}$  ならば  $(f - f(p_0))(z - p_0)^{-1} \in H^\infty(\lambda_U)$  である。

証明).  $p_0 \notin \bar{U}$  と  $p_0 \in \bar{U}$  に對しては明らか故,  $p_0 \in \partial U$  に對してだけ証明する。今  $f$  analytic at  $p_0 \in \partial U$  ならば  $\exists \delta > 0$  が存在して  $f$  analytic in  $\Delta(p_0; \delta)$  である。  $p_n \rightarrow p_0$ ,  $p_n \in \Delta(p_0; \delta) \cap (\mathbb{C} - \bar{U})$  とする。この時,  $\forall \delta' < \delta$  に對して  $\exists M_1 > 0$  が存在し,  $|F_n(z)| = |(f(z) - f(p_0))(z - p_n)^{-1}| < M_1$ ,  $z \in \bar{\Delta}(p_0; \delta') \cap (U - \{p_0\})$ ,  $(n \geq 0)$ 。一方,  $\exists M_2 > 0$  が存在して  $|F_n(z)| < M_2$ ,  $z \notin \bar{\Delta}(p_0; \delta')$   $(n \geq 0)$  である。よって  $F_n(z) \in H^\infty(\lambda_U)$   $(n \geq 1)$  は  $p_0$  以外の点で  $F_0(z)$  に有界各点収束する。従って  $F_0(z) = \frac{f(z) - f(p_0)}{z - p_0} \in H^\infty(\lambda_U)$  である。

補題 3.6.  $g \in \text{compact support}$  を持つ smooth function とする。この時,  $f \in H^\infty(\lambda_U)$  ならば  $T_g f \in H^\infty(\lambda_U)$  である。



証明)  $(T_g f)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy$

$$= \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta - \Gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy + \frac{1}{\pi} \iint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy$$

$$= F_1(\zeta) + F_2(\zeta), \quad (\zeta \in \Gamma) \text{ とする。}$$

この時,  $F_1 \in A(\Gamma)$  であり,  $f \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$  より  $(f(z) - f(\zeta))(z - \zeta)^{-1} \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$  a.e.  $(d\lambda_\Gamma)$ ,  $\zeta \in \Gamma$ 。一対  $\{f_n\} \subset A(\Gamma)$  が存在して,  $\|f_n\| \leq \|f\|$  かつ  $f_n \rightarrow f$  a.e.  $(d\lambda_\Gamma)$  である。このとき

$$(T_g f_n)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint \frac{f_n(z) - f_n(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy = F_{n1}(\zeta) + F_{n2}(\zeta) \quad (\zeta \in \Gamma) \text{ とする。}$$

但し,  $F_{n1}, F_{n2}$  は上と同様に定める。この時,  $F_{n1}, T_g f_n \in A(\Gamma)$  より  $F_{n2} \in A(\Gamma)$  であり,  $(f_n(z) - f_n(\zeta))(z - \zeta)^{-1} \in A(\Gamma)$  は a.e.  $(d\lambda_\Gamma)$   $\zeta \in \Gamma$  に対し  $(f(z) - f(\zeta))(z - \zeta)^{-1} \in L^\infty(\lambda_\Gamma)$  で weak\* 収束する。よって  $F_{n2}$  は  $F_2$  に a.e.  $(d\lambda_\Gamma)$  on  $\Gamma$  で有界各点収束する故  $F_2 \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$  である。従って  $T_g f = F_1 + F_2 \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$  である。

補題 3.7.  $f \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$  かつ  $p \in \Gamma$  とする。この時ある  $C > 0$  とある  $\delta > 0$  に対し,  $|f| \leq C$  a.e.  $(d\lambda_\Gamma)$  on  $\Delta(p; \delta)$  ならばある  $f_0 \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$  が存在して,  $f - f_0$  は  $p$  の近傍に analytic に拡張でき, かつ,  $\|f_0\| \leq 9C$  である。

証明)  $g \in \Delta(p; \delta)$  上の compact な  $\bar{g}$  を持つ smooth function

で  $0 \leq g \leq 1$ ,  $p$  の近傍で  $g=1$ , かつ  $|\partial g / \partial \bar{z}| \leq 4/\delta$  なるものとする。  
この時  $f_0$  として  $T_g f$  を取ればよい。

定理 3.8 任意の  $\rho \in A(\bar{U})^+$  は  $P_{\lambda_U}(1)$  を満たす。

証明)  $F \in H^\infty(\lambda_U + |p|)$  に対し  $P_{\lambda_U}(1)$  が不成立とすれば,  $\exists p \in \bar{U}$   
が存在して

$$\rho - \text{ess} \lim_{y \rightarrow p} \sup |F(y)| > \lambda_U - \text{ess} \lim_{y \rightarrow p} \sup |F(y)| \text{ である。}$$

今  $F$  を適当に作りかえ,  $\rho - \text{ess} \lim_{y \rightarrow p} \sup |F(y)| > 100 > 1 > \lambda_U - \text{ess} \lim_{y \rightarrow p} \sup |F(y)|$   
と考えるとよい。  $f \in H^\infty(\lambda_U)$ ,  $F = f$  a.e.  $(d\lambda_U)$  とすると  $\exists \delta > 0$   
が存在して  $|f| < 1$  a.e.  $(d\lambda_U)$  on  $\Delta(p; \delta)$  である。補題 3.7 の  $f_0$  と考  
え,  $f_1 = f_0 + (f - f_0)(p)$  とすると  $f - f_1$  は  $p$  で analytic であり  $(f - f_1)(p) = 0$ 。  
補題 3.6 よりある  $h \in H^\infty(\lambda_U)$  が存在して,  $f - f_1 = (z - p)h$  である。  
 $\|f_0\| \leq 9$  より,  $f_1 + (z - p)h = f$ ,  $\|f_1\| \leq 17$ 。補題 3.4 より  $F_1$ ,  
 $H \in H^\infty(\lambda_U + |p|)$  が存在して,  $F = F_1 + (z - p)H$ , かつ  $\|F_1\| \leq 17$  である。  
よって,  $\rho - \text{ess} \lim_{z \rightarrow p} \sup |F(z)| = \rho - \text{ess} \lim_{z \rightarrow p} \sup |F_1(z)| \leq 17$  で矛盾する。  
よって  $\rho$  は  $P_{\lambda_U}(1)$  をもつ。

定理 3.9 次は同値である。

- (i)  $A(\bar{U})$  は  $H^\infty(\bar{U})$  で pointwise boundedly dense である。
- (ii)  $d(h, A(\bar{U})) = d(h, H^\infty(\bar{U}))$ ,  $\forall h \in C(\bar{U})$  である。

証明) (i) が成立すれば  $H^\infty(\lambda_U) = H^\infty(U)$  である。又定理 3.8 & 定理 2.4 より  $d(h, A(U)) = d(h, H^\infty(\lambda_U)), \forall h \in C(\bar{U})$  である。従って (ii) が成立する。(ii)  $\rightarrow$  (i) は [4] の定理 2.2 による。

今、 $\mu$  を  $U$  に対する  $\partial U$  上の調和測度とする。即ち、 $U_i \in U$  の開成分、 $z_i \in U_i (i \geq 1)$  に対し  $\mu_i$  を  $z_i$  に対する  $\partial U_i$  上の調和測度とし、 $\mu = \sum_i \mu_i / 2^i$  とする。任意の  $f \in L^\infty(\mu)$  に対し、 $\tilde{f}(z) = \int f d\mu_z, z \in U$  とする。この時、 $\text{map}(f \rightarrow \tilde{f})$  は  $L^\infty(\mu)$  から  $U$  上の有界調和函数への連続写像である。

補題 3.10.  $\text{map}(f \rightarrow \tilde{f})$  は  $L^\infty(\mu)$  から  $L^\infty(\lambda_U)$  の或  $\text{weak}^*$  閉部分空間への linear isometric isomorphism である。

証明). isometric なる事は Dirichlet 問題に於る  $f$  に対する  $\tilde{f}$  の定義方より明らかである。後はこの事実と合せ明らか。

補題 3.11.  $U \supset V$  を開集合とする。 $f \in L^\infty(\mu)$  に対し  $\partial V$  上の函数  $g$  を

$$g = \begin{cases} \tilde{f} & \text{on } \partial V \cap U \\ f & \text{on } \partial V \cap \partial U \end{cases} \quad \text{と定めるならば}$$

$\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z), z \in V$  である。

補題 3.12. 任意の  $\lambda_0 \in \partial U$ , 任意の  $f \in L^\infty(\mu)$  に対し

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{\lambda \in \partial U, \lambda \rightarrow \lambda_0} |f(\lambda)| \leq \limsup_{U \ni z \rightarrow \lambda_0} |\tilde{f}(z)| \text{ が成立する。}$$

更にもし  $\lambda_0$  が正則境界点であるとき, 及び  $\tilde{f}$  が  $U$  上で analytic のときに等号が成立する。

証明). 右辺 =  $C$  とおく。この時  $\forall \varepsilon > 0$  に対し  $\exists \delta > 0$  が存在し  $|\tilde{f}| < C + \varepsilon$  on  $\Delta(\lambda_0, \delta) \cap U = V$ . 補題 3.11 の  $g \in \mathcal{E}$  を考えれば  $\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z)$ ,  $z \in V$  である。よって  $\|\tilde{g}\|_V = \|\tilde{f}\|_V < C + \varepsilon$ . 又補題 3.10 より  $\|g\| = \|\tilde{g}\|_V < C + \varepsilon$ . 又補題 3.11 より  $\partial U$  及び  $\partial V$  上の各々の調和測度は  $\partial U \cap \partial V$  に含まれる可測集合に対し、同じ値をとる。従って  $|f| < C + \varepsilon$  a.e.  $(\mu)$  on  $\partial U \cap \partial V$ . よって不等式が成立。  
 $\lambda_0$  が正則境界点の時には  $z \in U$ ,  $z \rightarrow \lambda_0$  に対し  $\mu_z \rightarrow \delta_{\lambda_0}$  に weak\* 収束する事より得られる。又  $\tilde{f}$  が analytic on  $U$  のときには Jensen の結果より得られる。

以上の  $L^\infty(\mu)$  に対する結果と補題 3.4 とより次の結果を得る。

定理 3.13.  $\forall f \in A(U)^\perp$  に対し

$\operatorname{map}(f \rightarrow \tilde{f})$  は  $H^\infty(\mu + |\mu|)$  から  $H^\infty(\lambda_U)$  への algebra isometric isomorphism である。

定理 3.14.  $\rho \in A(\mathbb{D})^+$ ,  $\rho$  は  $\partial\mathbb{D}$  上の測度とする。

この時  $\rho$  は  $P_\mu(1)$  を持つ。

証明) 上の定理 3.13 及び  $\rho$  が  $P_{\lambda_\rho(1)}$  従って  $P_{\lambda_\rho(2)}$  を持つこと

更に Jensen の結果等を用いることにより定理は証明される。

系 3.15  $\rho \in A(\mathbb{D})^+$  に対し、次は同値である。

- (i)  $A(\mathbb{D})$  が  $H^\infty(\mathbb{D})$  で pointwise boundedly dense である。
- (ii)  $H^\infty(\mu + |\rho|)$  と  $H^\infty(\mathbb{D})$  に於て  $\text{map}(f \rightarrow \tilde{f})$  は algebra isometric isomorphism である。

証明) 定理 3.13 及び補題 3.4 より得られる。

系 3.16  $d(h, A(\mathbb{D})) = d(h, H^\infty(\mu)) \quad \forall h \in C(\partial\mathbb{D})$ 。

#### § 4 Application to $R(K)$ .

ここでは § 2 を  $R(K)$  に対応させた時について述べる。またの結果は定理 4.5 である。

$K$  を compact 集合とし、 $R(K)$  は  $K$  の外側に極をもつ有理函数による  $C(K)$  内での一様閉包を示す。又、 $\mathcal{Q}$  は  $R(K)$  の non-

peak point 全体の集合とし,  $\lambda_Q$  は  $\mathbb{Q}$  に制限された面積測度を表わすものとする。  $R(K)$  の  $L^\infty(\lambda_Q)$  での weak\* 閉包を  $H^\infty(\mathbb{T})$  で示す。  $R(K)^\perp$  は  $R(K)$  に対する orthogonal measure の全体を示すものとする。

補題 4.1 (Wilken) 任意の  $\tau \in R(K)^\perp$  に対し,

$$\hat{\tau}(z) = \int \frac{d\tau(s)}{s-z} \quad \text{とおくと} \quad \hat{\tau} = 0 \text{ a.e. } (dx dy)$$

on  $\mathbb{C} - \mathbb{Q}$  である。

系 4.2.  $h$  は compact な台をもつ有界な Borel 函数とする。今

$$H(s) = \iint_{\mathbb{C} - \mathbb{Q}} \frac{h(z)}{z-s} dx dy \quad (s \in K)$$

とすれば  $H(s) \in R(K)$  である。

次の定理は  $AC(\mathbb{T})$  における時と同様に重要である。

定理 4.3 (A. Davie) 任意の  $f \in H^\infty(\lambda_Q)$  に対し,

ある  $\{f_n\} \subset R(K)$  が存在して,  $\|f_n\| \leq \|f\|$ , かつ  $f_n(g) \rightarrow f(g)$  a.e.  $(dx dy)$   $g \in \mathbb{Q}$  とできる。

定理 4.4. 任意の  $\tau \in R(K)^\perp$  は  $P_{\lambda_Q}(1)$  をもつ。

証明)  $H^\infty(\lambda_Q)$  に対し 補題 3.5 は成立し, 4.3 より 補題 3.4 は成立す。又上の系 4.2, 定理 4.3 より 補題 3.6 が従って 3.7 が成立し, これらの事実より定理は証明される。

上の定理と定理 2.4 より直ちに次の結果を得る。

定理 4.5.  $H^\infty(\lambda_Q) \cap C(K) = R(K)$ .

即ち 任意の  $f \in C(K)$  に対し, ある  $\{f_n\} \subset R(K)$ , 有界列が存在して  $f_n(q) \rightarrow f(q)$  a.e.  $q \in Q$  ならば  $f \in R(K)$  である。

今  $X$  上の non-peak point の集合を  $Q'$  とし  $\nu = \mu + \lambda_{Q'}$  とするときが成立す。証明はほぼ定理 3.14 と同じである。

定理 4.6. 任意の  $\rho \in R(K)^+$ , 但し  $\rho$  は  $X$  上の測度とすると  $\rho$  は  $P_0(1)$  をもつ。

### 参考文献

1. A. Browder, Introduction to Function Algebras, W.A. Benjamin, Inc., 1969.
2. A.M. Davie, Bounded approximation and Dirichlet sets, J. Functional Anal. 6 (1970), 460-467.

3. ———, Bounded limits of analytic functions, P. A. M. S., 32 (1972), 127-133.
4. A. M. Davie, T. W. Gamelin and J. Garnett, Distance estimates and pointwise bounded density, T. A. M. S., 175 (1973), 37-68.
5. T. W. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice Hall, 1969.
6. T. W. Gamelin and J. Garnett, Constructive techniques in rational approximation, T. A. M. S. 143 (1969), 187-200.
7. ———, Bounded approximation by rational functions, Pacif. J. Math. 45 (1973), 129-150.
8. 大津賀 信, 函数論特論, 現代数学講座 9, 共立出版, 1957.